Funciones continuas y más

En clase se probó el siguiente resultado:

Lemma 1. *Si $A \subset \mathbb{R}$ es cerrado y acotado, y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f es acotada.*

Antes de iniciar, la prueba del teorema importante de esta sección, resultará conveniente citar algunos resultados vistos a lo largo del curso y en cálculo I.

Axioma 1 (del supremo)**.** *Todo conjunto de $D \subset \mathbb{R}$ acotado superiormente tiene una mínima cota superior. Equivalentemente, si $\sup D$ es el supremo, entonces para cada $\epsilon > 0$ existe $x \in D$ tal que*

$$\sup D - \epsilon < x.$$

Lemma 2 (Cambio de funciones continuas con límites)**.** *Si $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ continua y $\{y_k\} \subset D$ sucesión convergente entonces*

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{x\to\infty} x_n\right)$$

Lemma 3 (Caracterización de cerrados)**.** *$A \subset \mathbb{R}^n$ cerrado si y solo si $A = \operatorname{cl} A$.*

Lemma 4 (Sucesiones acotadas)**.** *Toda sucesión acotada tiene una subsucesión convergente.*

Lemma 5 (Ubicación del límite de sucesiones)**.** *Si $A \subset \mathbb{R}^n$ acotado. Defina la cerradura $\operatorname{cl} A := \operatorname{int} A \cup \partial A$. Si $\{x_n\} \subset A$ es una sucesión convergente a $\bar{x}$, entonces $\bar{x} \in \operatorname{cl} A$.*

NOTA: En el lema anterior también se probó el converso, pero este no será de utilidad en la demostración del siguiente

Teorema principal

Teorema 1. *Sea $A \subset \mathbb{R}$ un conjunto cerrado y acotado y $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función continua, entonces f alcanza su m áximo y su mínimo.*

Demostración. Probaremos solo el resultado concerniente al máximo, ya que el resultado para el mínimo puede obtenerse por los mismos pasos.

Lo primero por notar es que la imagen directa de A, $f(A)$, es un conjunto acotado por el lema 1, en particular es acotado superiormente. Por el axioma del supremo sabemos que $\sup A \in \mathbb{R}$ y por la equivalencia del supremo sabemos que para cualquier $\ell \in \mathbb{N}$ (tomando $\epsilon = 1/\ell$ para cada $\ell \in \mathbb{N}$) existe $y_\ell \in f(A)$ tal que

$$\sup f(A) - \frac{1}{\ell} < y_\ell \quad \text{y} \quad \sup f(A) - y_\ell \geq 0$$

Hay que notar dos cosas importantes de la sucesión $\{y_\ell\}$:

1. La sucesión $\{y_\ell\}$ es convergente a $\sup f(A)$, ya que para todo $\epsilon > 0$ existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(m_0+1)^{-1} < \epsilon \leq (m_0)^{-1}$ (propiedad arquimediana), entonces para cada $\ell > m_0 + 1$ se satisface que

   $$|y_\ell - \sup f(A)| < \frac{1}{\ell} < \frac{1}{m_0+1} < \epsilon$$

   En otras palabras a partir del $(m_0+1)-$ésimo elemento de la sucesión $y_\ell \in B_\epsilon(\sup f(A))$.

2. La sucesión $y_\ell \subset f(A)$ define una nueva sucesión en el dominio A ya que para cada $y_\ell \in f(A)$, existe $x_\ell \in A$ tal que $f(x_\ell) = y_\ell$ (pues $y_\ell \in f(A)$ y $f(A)$ es la imagen directa del dominio A). Con ello hemos creado una sucesión $\{x_\ell\} \subset A$ tal que $\{f(x_\ell)\} = \{y_\ell\}$ es convergente a $\sup f(A)$.

Note que la sucesión $\{x_\ell\}$ NO es necesariamente convergente, pero dado que $\{x_\ell\} \subset A$ que es acotado, entonces por el lema 4 existe una subsucesión convergente $\{x_{\ell_k}\}$ convergente, digamos a x_0. Además como $\{x_{\ell_k}\} \subset \{x_\ell\} \subset A$ y A es cerrado por los lemas 3 y 5 sabemos que x_0 es un punto en A en dominio de f, por tanto $f(x_0) \in \mathbb{R}$. En resumen:

$$\begin{aligned}
\sup f(A) &= \lim_{\ell\to\infty} y_\ell && \text{(por construcción de } \{y_\ell\}) \\
&= \lim_{k\to\infty} y_{\ell_k} && \text{(ya que } \{y_{\ell_k}\}\text{es subsucesión de la sucesión convergente } \{y_\ell\}) \\
&= \lim_{k\to\infty} f(x_{\ell_k}) && \text{(por item 2)} \\
&= f\left(\lim_{k\to\infty} x_{\ell_k}\right) && \text{(por la continuidad de } f) \\
&= f(x_0) && \text{(por la convergencia de } \{x_{\ell_k}\})
\end{aligned}$$

Por lo tanto $f(x_0) = \sup A$, es decir el supremo se alcanza.

□

Funciones continuas básicas

En esta sección daremos algunos ejemplos de funciones continuas de $D \subset \mathbb{R}^n$ a los reales (funciones escalares) ya que como se mencionó en la clase que este tipo de funciones son las entradas de funciones (más generales) de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$ y la continuidad de estas puede inducirse de la continuidad de las primeras.

1. La función identidad dada por $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por $f(x) = x$ es continua.

   Demostración. sea $x_0 \in \mathbb{R}^n$, probaré que f es continua en dicho punto. Asuma $\epsilon > 0$, y escoja $\delta = \epsilon > 0$ es inmediato de la definición de función identidad que

   $$\|f(x) - f(x_0)\| = \|x - x_0\| < \epsilon \quad \text{siempre que} \quad \|x - x_0\| < \delta = \epsilon.$$

   Como x_0 es arbitrario se sigue la continuidad en todo $\mathbb{R}^n$.

   □

2. El mapeo de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definido por $(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mapsto x_i$ para cualquier $i = 1, 2, \cdots n$ es continuo.

   Demostración. Si E_i es el $i-$ésimo vector canónico de $\mathbb{R}^n$, la demostración de este inciso se desprende de que $x_i = x \cdot E_i$ es una función continua pues es el producto punto de la función continua $f(x) = x$ y la función constante $x \mapsto E_i$; □

3. La función de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ definida como cualquier monomio resultante de multiplicar algunas de (o todas) las entradas del vector $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ es continua; por ejemplo $f(x, y, z) = 2xy$.

   Demostración. Este resultado es inmediato del inciso anterior y de que el producto de funciones continuas es continua. □

4. Cualquier polinomio que dependa solo de las entradas de la variable argumento es continua, por ejemplo la función norma al cuadrado, $(x_1, x_2, \cdots x_n) \mapsto x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$ es continua.

   Demostración. Esto sale inmediatamente del inciso anterior y de que la suma de funciones continuas es continua. □

5. Si $P(x_1, x_2, \cdots x_n)$ es una función polinomial de las entradas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua entonces la composición $f(P(x_1, x_2, \cdots x_n))$ es continua. Por ejemplo las funciones $g(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}$ y $h(x_1, x_2, \cdots x_n) = \sin(x_1^2) + x_n$ son funciones continuas por los incisos anteriores

Aplicaciones

En el tiempo restante de la clase te propongo que analices los siguientes dos ejercicios respondiendo a las preguntas de cada uno.

1. Sea

$$f(x, y, z) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} & \text{si } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 1 & \text{si } x = y = z = 0. \end{cases}$$

   a) ¿Donde está bien definida la función f (cuál es su dominio)?

   b) ¿Donde es continua?

   c) ¿Puede extenderse de manera continua a todo $\mathbb{R}$?

   d) Si puede extenderse continuamente a todo $\mathbb{R}$, ¿que pasa con la función f restringida al dominio $\bar{B}_1(0)$?

   HINT: Recordar un ejercicio similar visto con Vero.

2. Analice la función $e^{-x^2/y} : P \to \mathbb{R}$ donde la región $P := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$.

   a) ¿El conjunto P es abierto, cerrado o ninguno de ellos?

   b) Si el conjunto P no es cerrado, ¿puede entender la función $e^{-x^2/y}$ de manera continua hasta la frontera?

   c) ¿La función puede extenderse de manera continua al origen?